Tentamen Discrete Structuren

woensdag 8 februari 2006, 14 - 17 uur

Elke opgave levert maximaal 15 punten op. Het cijfer is (p/10) + 1, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is. Wie een 5 of hoger heeft gehaald voor de toets van 16 december 2005, hoeft de eerste 3 opgaven niet te maken: het toetsresultaat telt voor de helft mee in het tentamenresultaat. Heb je bij de toets 5 of hoger gehaald en maak je ook de opgaven 1, 2 en 3, dan telt het beste resultaat.

NB. Beargumenteer je antwoorden.

1. Een propositionele formule is in *disjunctieve normaalvorm* als het een disjunctie is van 1 of meer conjuncties van 1 of meer (negaties van) propositionele variabelen. Voorbeeld: $\neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$.
   (a) Zet $\neg((p \to q) \leftrightarrow \neg r)$ *via een geannoteerd lineair bewijs* om in een disjunctieve normaalvorm.
   (b) Stel dat van de propositielogische formule A gegeven is dat hij slechts de propositieletters p, q, r bevat en dat hij de waarde 1 (true) heeft in de volgende drie gevallen: (1) $p = q = r = 1$, (2) $p = 0, q = r = 1$, (3) $p = q = 1, r = 0$; in alle andere gevallen heeft A de waarde 0 (false). Geef een formule B in disjunctieve normaalvorm die equivalent is met A.
2. Bewijs: ${}^2\log 3$ is irrationaal. (Aanwijzing: ${}^2\log 3$ voldoet aan $2^{{}^2\log 3} = 3$.)
3. Bewijs met volledige inductie over N: $\forall n \in N\ 5 \mid (8^n - 3^n)$. In woorden: voor elk natuurlijk getal n is $8^n - 3^n$ deelbaar door 5.
4. (a) Geef definities van de begrippen *boom* (tree) en *opspannende boom* (spanning tree).
   (b) Bewijs dat elke eindige samenhangende graaf G een opspannende boom heeft. (Aanwijzing: beschouw een minimale samenhangende deelgraaf van G.)
5. Zij $\langle X, \leq \rangle$ een partieel geordende verzameling.
   (a) Definieer: x is een minimaal element van X.
   (b) Definieer: x is het kleinste element van X.
   (c) Bewijs: X heeft hoogstens 1 kleinste element.
   (d) Geef het Hasse-diagram van een eindige partiële ordening die geen kleinste element en ook geen grootstse element bevat.
6. (a) Laat mbv. een tegenvoorbeeld zien dat
   $$\forall x(p(x) \to \exists y\, q(x, y)) \Rightarrow \exists y \forall x(p(x) \to q(x, y))$$
   niet geldt.
   (b) Bewijs mbv. een geannoteerd lineair bewijs
   $$\exists y \forall x(p(x) \to q(x, y)) \to \forall x(p(x) \to \exists y\, q(x, y))$$